7. INTEGRALES DE SUPERFICIE

7.2. Integrales de funciones escalares sobre superficies

Integral de una función escalar sobre una superficie

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, y $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función o campo escalar continuo. Se define la **integral de superficie** de f sobre S como:

$$\iint_S f\, d\sigma = \iint_D f\left(\Phi(u,v)\right) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du\, dv$$

Observaciones

1. La integral de superficie de una función escalar no depende de la parametrización elegida.
2. La integral de superficie de la función $f \equiv 1$ sobre S coincide con el área de S.

Ejemplo

Calcula la integral de $f(x,y,z) = x$ sobre la gráfica de la función $z = x^2 + y$, $(x,y) \in [0,1] \times [-1,1]$.

Interpretación física y aplicaciones

Si la superficie S es una placa de cierto material con densidad puntual $\delta(x,y,z)$, su **masa** y **centro de gravedad** son:

$$m = \iint_S \delta\, d\sigma \qquad\qquad G\left(\frac{1}{m}\iint_S x\delta\, d\sigma,\ \frac{1}{m}\iint_S y\delta\, d\sigma,\ \frac{1}{m}\iint_S z\delta\, d\sigma\right)$$

Ejemplo

Calcula la masa del helicoide S parametrizado por $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, si la densidad puntual de cada punto es el doble de la distancia del punto al eje del helicoide (eje z).

Ejercicios

1. Calcula la integral de las siguientes funciones escalares sobre la superficie que se indica:
   (a) $f(x,y,z) = xyz$, sobre el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,1,1)$.
   (b) $f(x,y,z) = x + y + z$, sobre la semiesfera unidad del semiespacio $z \ge 0$.
2. Calcula la masa de una placa con forma de semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$, si la densidad puntual es $\delta(x,y) = x^2 + y^2$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. (a) $\frac{\sqrt{6}}{30}$; **(b)** π.
2. $\frac{4}{3}\pi R^4$.